Osaka University Knowledge Archive

Title	無限分解可能ナル分布法則ノ集合ガ正規族ヲナス為ノ條件
Author(s)	伊藤, 清
Citation	全国紙上数学談話会. 246 p.1510-p.1522
Issue Date	1942-12-14
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75019
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

1087. 無限分解可能ナル分布法則ノ集合ガ正規族ヲナス爲ノ條件

伊藤　清（統計局）

§1. $\mathfrak{G}$ヲ實數空間ノ上ノ確率分布法則（以後之ヲ單ニ分布法則ト呼ブ）ノ集合トスル。

$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナスタメノ條件ニツイテハ次ノP. Lévyノ定理ガアル。

定理　(P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires p. 63)

$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(1)\quad \lim_{l\to\infty}\sup_{F\in\mathfrak{G}}\int_{|\lambda|\geq l} F(d\lambda)=0$$

ナルコトデアル。

今$\mathfrak{G}$ガ無限分解可能ナル分布法則ノミノ集合デアル時、$\mathfrak{G}$ガ正規族ヲナスタメノ必要充分條件ヲ別ナ形デ求メテ見タイ。

先ヅ無限分解可能ナル確率法則LハP. Lévyノ定理ニヨレバ、次ノ標準形デ表ハサレル。即チ$\varphi_L(z)$ヲLノ特性函數トスレバ

$$(2)\quad \varphi_L(z)=\exp\left\{imz-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\right\}$$

$$\left(\text{但シ} \oint_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty}\right)$$

茲ニ

(3) m ハ實數

(4) $\sigma \geqq 0$

(5) n ハ實數空間ノ上ノ（必ズシモ有界ナラザル）測度デ

$$(5.\mathrm{A}) \quad \int_{|u|\geqq 1} n(du) < \infty$$

$$(5.\mathrm{B}) \quad \int_{|u|\leqq 1} u^2 n(du) < \infty$$

而モ上ノ(4)—(5.B)ヲ滿ス(m, σ, n)ト無限分解可能ナル分布法則Lトノ間ニハ一對一ノ関係ガアル。コノm, σ, nヲLノ三要素ト呼ビ、m_L, σ_L, n_Lニテ表ハスコトニスル。

ソコデ$\mathfrak{S}$ヲ無限分解可能ナル分布法則ノ集合トスルトキ，$\mathfrak{S}$ガ正規族ヲナスタメノ條件デ、コノ法則ノ三要素ニ関スル條件ニテ表ハスコトガ本稿ノ目的デアル。結論ヲ先ニイフト

定理．無限分解可能ナル分布法則ノ集合$\mathfrak{S}$ガ正規族ヲナス爲ノ必要充分條件ハ

$$(6) \quad \sup_{L\in\mathfrak{S}} |m_L| < \infty$$

$$(7)\qquad \sup_{L\in\mathfrak{G}} |\sigma_L| < \infty$$

$$(8.\mathrm{A})\qquad \sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_{|u|\geqq a} n_L(du) < \infty \quad \text{for } a>0$$

$$(8.\mathrm{B})\qquad \lim_{a\to\infty} \sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_{|u|\geqq a} n_L(du) = 0$$

$$(9)\qquad \sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_{|u|\leqq 1} u^2 n_L(du) < \infty$$

ガ同時ニ成立スルコトデアル。

§2. 先ヅ最初ニ $\mathfrak{G}$ ガ正規族ヲナストイフ假定カラ (8.B) ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。

若シモ(8.B)ガ成立シナイデ、コノ極限値（ソノ存在ハ明ラカ）ガ正数 η ナリトセヨ。

然ラバ任意ノ整数 k ニ對シテ $L_k \in \mathfrak{G}$ ガ存在シテ, L_k ノ三要素 m_k, σ_k, n_k ハ

$$\int_{|u|\geqq k} n_k(du) > \frac{2\eta}{3}$$

即チ
$$\int_{k}^{\infty} n_k(du) > \frac{\eta}{3} \quad \text{又ハ} \quad \int_{-\infty}^{-k} n_k(du) > \frac{\eta}{3}$$

ノ何レカガ無限ニ多クノ k ニ對シテ成立スル。何レデモ同様デアルカラ前者ノ場合ヲ考ヘル。即チ $\{k\}$ ノ部分列 $\{k_p\}$ ニ對シテ

$$\int_{k_p}^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3} \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

故ニ勿論（$k_p \geqq p$ ナル故）

$$\int_{p}^{\infty} n_{k_p}(du) > \frac{\eta}{3}$$

L_{k_p} ヲ簡単ノタメ L_p ニテ書キナホシ，ソノ三要素ヲ再ビ m_p, σ_p, n_p ニテ表ハセバ

$$\int_{p}^{\infty} n_p(du) > \frac{\eta}{3}$$

$\alpha = \min\left(\frac{\eta}{3}, \log_e 2\right)$ トスレバ勿論

$$(1) \quad \int_{p}^{\infty} n_p(du) > \alpha > 0 \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

今準備トシテ Lemma ヲ証明スル。

Lemma 1. L, L' ガ無限分解可能ナル分布法則ナルトキ

$$\sigma_L \leqq \sigma_{L'} \qquad n_L \leqq n_{L'}$$

ナラバ

$$Q(L, l) \geqq Q(L', l)$$

証明. 次ノ函数 $\varphi(z)$ ハアル無限分解可能ナル分布法則 L^* ノ特性函数ナリ.

$$\log \varphi(z) = i(m_{L'} - m_L)z - \frac{\sigma_{L'}^2 - \sigma_L^2}{2} z^2$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\left(n_{L'}(du)-n_{L}(du)\right)$$

而モ　$\varphi_{L'}(z)=\varphi_{L}(z)\,\varphi_{L''}(z)$，故ニ $L'=L*L''$

故ニ　P. Lévy ノ定理ニヨリ（前掲書 p. 90）

$$Q(L',\ell)\leqq Q(L,\ell)\qquad\text{(Lemma ノ証明終)}$$

備テ

$$(2)\quad \exp\left\{\int_{p}^{\infty}(e^{izu}-1)\,n_p(du)\right\}$$ ニ對應スル分布法則ヲ G_p トシ

$$(3)\quad \exp\left\{\frac{\alpha}{\int_p^{\infty}n_p(du)}\int_p^{\infty}(e^{izu}-1)\,n_p(du)\right\}$$ ニ對應スル分布法則ヲ H_p トス．而ラバ上ノ Lemma 1 ニヨリ（尚 (1) 式ニ注意シテ）

$$(4)\quad Q(L_p,\ell)\leqq Q(G_p,\ell)\leqq Q(H_p,\ell)$$

$H_p(\{0\})=e^{-\alpha}$，　$H_p((-\infty,0))=0$，

$H_p((0,p))=0$，

$H_p((H_p,\infty))=1-e^{-\alpha}$

$\ell>p$ ナラバ

$$Q(H_p,\ell)\leqq \max(e^{-\alpha},1-e^{-\alpha})\leqq e^{-\alpha}$$

（$\alpha\leqq\log_e 2$ ニ注意シテ!!）

$$\int_{|\lambda|\geqq l} L_p(d\lambda) = 1 - \int_{-l+0}^{l-0} L_p(d\lambda) \geqq 1 - Q(L_p, 2l)$$

$$\geqq 1 - e^{-\alpha} > 0$$

故ニ前掲ノ P. Lévy ノ定理ニヨリ $\{L_p\}$ ハ正規族ヲナサナイ。故ニ $\mathfrak{G}$ モ亦正規族デナイコトニナリ，假定ニ反スル。故ニ §1 (8.B) ガ成立スルヲ要スル。

§3. 次ニ更ニ進ンデ §1 (8.A) ヲ証明スル。今 (8.A) ガ成立シナイデ、アル $a(>0)$ ニ対シテ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^{\infty} n_L(du) = \infty$$

トセヨ。$b > a$ トスレバ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^{b} n_L(du) + \sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_b^{\infty} n_L(du) \geqq \sup \int_a^{\infty} n_L(du)$$

$$= \infty$$

§2 ニ証明シタ所ニヨレバ充分大キイ b ニ對シテハ上ノ第二項ハ 1 ヨリ小サイ。故ニカヽル b ニ對シテハ

$$\sup_{L\in\mathfrak{G}} \int_a^{b} n_L(du) = \infty$$

前ト全様ニ $L_1, L_2, \cdots\cdots \in \mathfrak{G}$ ヲ適當ニ選出シテ（n_k ヲ上ト全様ニ定義シテ）

$$(1) \quad \int_a^{b} n_k(du) > k$$

ナランメ得ルト假定シテヨイ。今

(2) $\exp\left\{\int_a^b (e^{izu}-1)\, n_k(du)\right\}$ ニ對應スル分布法則ヲ G_k トスルナラバ、Lemma 1 ニヨリ

(3) $Q(L_k, l) \leqq Q(G_k, l)$

偖テ G_k ノ平均値ハ $M_k=\int_a^b u\, n_k(du)$, 標準偏差ハ

$D_k=\sqrt{\int_a^b u^2 n_k(du)} \geqq a\sqrt{k} \to 0$ 特性函數ノ計算ニヨリ $\frac{1}{D_k}(G_k-M_k)$ ハ正規分布ニ近ヅクコトガ分ル。

故ニ

$$\lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2D_k)=\theta=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda<1$$

D_k ハ k ト共ニ限リナク増大スルカラ

$$\lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2l) \leqq \lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2D_k)=\theta$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty} G_k([-l, l]) \leqq \lim_{k\to\infty} Q(G_k, 2l) \leqq \theta$$

故ニ $\sup_{k=1}^{\infty}\int_{|u|\geqq l} G_k(du) \geqq 1-\theta$

從ッテ前述ノ Lévy ノ定理ニヨリ $\{G_k\}$ ハ正規族デハナイ。從ッテ勿論 $\mathfrak{G}$ ガ正規族デナクナリ，假定ニ反スル。故ニ §1 (S.A) ガ成立スルヲ要スル。

§4. §3ト全ク同様ノ論法デ§L.(7),(9)ガ証明出来ル。殘ル所ハ(6)ノミデアル。

之レヲ証明スル前ニ §L.(7),(8.A),(8.B),(9)ガ成立スルトキ

$$(1)\quad \exp\left\{-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n_L(du)\right\}$$

ニ對應スル分布法則ヲ L'_L トスレバ、$\{L'_L;\ L\in\mathfrak{S}\}$ ハ正規族ヲナスコトヲ証明シヨウ。

(1)ノ exp{ }ノ中ヲ書キ換ヘテ

$$(2)\quad i m'_L z-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{|u|<1}\left(e^{izu}-1-izu\right)n_L(du)$$

$$+\int_{u\geqq 1}\left(e^{izu}-1\right)n_L(du)+\int_{u\leqq -1}\left(e^{izu}-1\right)n_L(du)$$

茲ニ $m'_L-\int_{|u|<1}\frac{u^3}{1+u^2}n_L(du)-\int_{|u|\geqq 1}\frac{u}{1+u^2}n_L(du)$

而ラバ

$$(3)\quad |m'_L|\leqq\int_{|u|<1}u^2 n_L(du)+\int_{|u|\geqq 1}n_L(du)$$

右辺ハ假定ニヨリ有界。故ニ $|m'_L|<C<\infty$ トスル。

次ニ

$$(4)\quad \exp\left\{-\frac{\sigma_L^2}{2}z^2+\int_{|u|<1}\left(e^{izu}-1-izu\right)n_L(du)\right\}$$

ニ對應スル分布ヲ H_L

$$(5)\quad \exp\left\{\int_{u\geqq 1}(e^{izu}-1)\,n_L(du)\right\}$$ ニ對應スル分布ヲ G_L

$$(6)\quad \exp\left\{\int_{u\leqq -1}(e^{izu}-1)\,n_L(du)\right\}$$ ニ對應スル分布ヲ G'_L

トスル。

$$(7)\quad L' = m'_L + H_L * G_L * G_L$$

先ヅ H_L トル分布ノ平均値ハ 0 デ，ソノ標準偏差ハ $\sigma_L^2+\int_{|u|\leqq 1}u^2 n_L(du)$ デアッテ，コレハ L ガ $\mathfrak{G}$ ノ上ヲ動クトキニ一樣ニ有界デアル。ソノ上限ヲ $C'(<\infty)$ トスル。

$$(8)\quad \int_{|\lambda|\geqq l} H_L(d\lambda) \leqq \frac{C'}{l^2}$$

次ニ $\int_{|\lambda|\geqq l} G_L(d\lambda)$，$\int_{|\lambda|\geqq l} G'_L(d\lambda)$ ガ共ニ $l\to\infty$ ノトキ $L(\in\mathfrak{G})$ ニ關シテ一樣ニ 0 ニ近ヅクコトヲ証明スル。何レデモ同ジコトデアルカラ前者ニツイテ証明ヲスル。

$$(9)\quad \sup_{L\in\mathfrak{G}}\int_{u\geqq a} n_L(du) = \varphi(a)$$

トスレバ $\varphi(a)$ ハ單調非減少デ $\lim_{a\to\infty}\varphi(a)=0$ ナルコトハ §1 ノ條件 (8.A), (8.B) ニヨリ明ラカ。

今$[1,\infty]$ノ上ノ測度nヲ

$$(10)\quad n([a_1,a_2]) = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) \qquad (1 \leqq a_1 < a_2)$$

ニテ定義シ

$$(11)\quad \exp\left\{\int_{u \geqq 1} (e^{izu} - 1)\, n(du)\right\}$$

ニ對應スル分布法則（ソノ存在ハ$\lim_{a\to\infty} \varphi(a) = 0$カラ出ル）ヲ$G$トシタトキ

$$(12)\quad \int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda) \leqq \int_{|\lambda| \geqq l} G(d\lambda)$$

ヲ證明スレバ$\int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda)$ガ$l \to \infty$ノトキ一様ニ$0$ニ近ヅクトイヘル。今$f_L(a)$ヲ

$$(13)\quad \int_{u \geqq a} n(du) = \int_{u \geqq f_L(a)} n_L(du)$$

ニヨリ定義スル。先ヅ$a \geqq f_L(a)$（故ニ$f_L(a) = 1$ナルaノ値——コレヲ"b_L"ニテ表ハス——ヨリ小ナルaニ對シテハ$f_L(a)$ハ定義サレナイ）ナルコトニ注意シテ置カウ。據テ

$$(14)\quad \exp\left\{\int_{u \geqq b_L} (e^{izu} - 1)\, n(du)\right\}$$ ニ對スル分布ヲK_Lト

(15) $\exp\left\{\int_{1\leqq u<b_L}(e^{izu}-1)\,n(du)\right\}$ ニ對應スル分

布ヲ K'_L

トスル。而ラバ勿論 $G=K_L * K'_L$。今 K_L, K'_L ニ從フ互ニ獨立ナ確率變數ヲ x, y トスレバ, $x+y$ ハ G ニ從フ。而モ $x\geqq 0, y\geqq 0$. 故ニ

(16) $$\int_{|\lambda|\geqq l} G(d\lambda)=p(x+y\geqq l)\geqq p(x\geqq l)$$

$$=\int_{|\lambda|\geqq l} K_L(d\lambda)$$

故ニ

(17) $$\int_{|\lambda|\geqq l} K_L(d\lambda)\geqq\int_{|\lambda|\geqq l} G_L(d\lambda)$$

ヲ證明スレバ (12) ガ正シイコトニナル。ソノタメニ homogeneous differential process x_t ヲ定義シ

"1" $x_0=0$

"2" x_1 ハ K_L ニ從フ

"3" x_t ハ階段函數デアル。

ヤウニスル。(コノ可能性ノ證明ハ近刊ノ日本數學輯報ニ筆者ガ書イテオキマシタカラ御參照下サイ)。而ラバ區間 (a, a') $(b_L<a<a')$ ニ入ル高サヲ有スル飛躍ノ數ノ平均ハ $n((a, a'))$ デアル。今 a ナル飛躍ヲ全部 $f_L(a)$ ニ縮小スルトキニ得ラレル process ヲ x'_t トスルト

x_t ハ x_t ト同ジヤウナ process デ唯 "2" ノ代リニ、"y_1 ハ G_L ニ従フ" コトニナル。$0 \leqq y_1 \leqq x_1$ ハ明ラカ故（一般ニ "$0 \leqq y_t \leqq x_t$" モ成立スル）

$$\int_{|\lambda| \geqq l} G_L(d\lambda) = P(y_1 \geqq l) \leqq P(x_1 \geqq l)$$

$$= \int_{|\lambda| \geqq l} K_L(d\lambda)$$

即チ (17) ヲ得タ。

備テ (7) ニヨリ

$$\int_{|\lambda| > c+3l} L'_1(d\lambda) < \frac{c'}{l^2} + \int_{|\lambda| \geqq l} G(d\lambda) + \int_{|\lambda| \geqq l} G'_L(d\lambda)$$

右辺ハ $l \to \infty$ ノトキ $L (\in \mathfrak{G})$ ニ関シテ一様ニ 0 ニ近ヅクカラ、前述ノ P. Lévy ノ定理ニヨリ $\{L'_1 ; L \in \mathfrak{G}\}$ ハ正規族ヲナス。

§5. 備テ $\mathfrak{G}$ ガ正規族ヲナストナラバ，§2, §3 ニヨリ §1 (7) —— (9) ガ成立スル。而ラバ §4 ニヨリ $\{L'_1 ; L \in \mathfrak{G}\}$ ガ正規族ヲナス。故ニ m_L ガ一様ニ有界デナイトスルト、$\mathfrak{G}$ ガ正規族ヲナサナイコトニナリ、矛盾ニ陥ル。即チ §1 (6) モ亦成立シナケレバナラナイ。

逆ニ §1. (6) —— (9) ガ成立スレバ §4 ニヨリ上ノ集合 $\{L ; L \in \mathfrak{G}\}$ ガ正規族ヲナシ、§1 (6) ニヨリ

$\mathfrak{G}$モ亦正規族ヲナス。　　　　— 以上 —